



Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques

Christophe Hache, Zoé Mesnil

► To cite this version:

Christophe Hache, Zoé Mesnil. Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques. Élaboration d'une formation à la logique pour les professeurs de mathématiques, Jun 2012, Besançon, France. pp.201-223. hal-00874279

HAL Id: hal-00874279

<https://hal.science/hal-00874279>

Submitted on 6 Nov 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ÉLABORATION D'UNE FORMATION A LA LOGIQUE POUR LES PROFESSEURS DE
MATHÉMATIQUES.

Christophe HACHE, Zoé MESNIL
IREM de Paris
LDAR, Université Paris Diderot

Nous voudrions dans cet atelier présenter un stage de formation continue intitulé « Initiation à la logique » et proposé par l'IREM de Paris depuis 2010 dans les trois académies d'Île de France. Il s'agit notamment d'expliquer certains de nos choix relatifs aux contenus de ce stage. Comme nous le verrons dans la première partie de cet exposé, nous nous inscrivons dans le thème 1 du colloque de la CORFEM 2012 autour des « Nouveaux savoirs et nouveaux dispositifs dans l'enseignement secondaire », non pas parce que la logique fait son apparition dans l'enseignement des mathématiques au lycée, mais plutôt parce qu'un accent particulier est mis dessus dans les derniers programmes. Ceux-ci fixent en effet des objectifs en matière de « notations et raisonnement mathématiques », tentant peut-être de répondre ainsi au constat récurrent de difficultés des élèves dans leur manière de s'exprimer et de raisonner.

Ces objectifs concernent des notions relevant de la logique, le statut de ces notions est flou, dans les programmes, mais aussi dans la pratique des mathématiciens, comme nous le verrons. Il n'y a effectivement pas de contenu de référence en ce qui concerne la logique, pas de consensus ni sur les connaissances dans ce domaine qui sont nécessaires pour faire des mathématiques ni sur la manière de les transmettre aux élèves et étudiants.

La logique étudie deux composantes de l'activité mathématique : le langage et le raisonnement. Dans la formation que nous proposons, nous insistons davantage sur les liens entre logique et langage, qui sont plus rarement évoqués que ceux entre logique et raisonnement. Nous proposons ainsi aux professeurs de perfectionner leurs connaissances en logique, à partir d'une approche naïve du langage mathématique qui leur est familier. Sans entrer dans une présentation formelle de la logique mathématique, nous lui empruntons certains de ses objets d'étude dont nous donnons quelques propriétés et dont nous nous servons pour mettre à jour certains implicites et certaines ambiguïtés du langage mathématique. Ces apports théoriques visent surtout à permettre aux professeurs d'exercer une certaine vigilance sur la façon dont « on parle les mathématiques » (dont ils parlent des mathématiques, dont ils parlent en cours de mathématiques, dont parlent les élèves etc.) et de repérer ainsi ce qui peut être particulièrement complexe pour les élèves. Nous proposons ici, en deuxième partie, quelques exemples des points abordés pendant le stage et les choix qui les motivent.

Le stage comporte aussi une partie plus pratique. Nous mettons à l'épreuve ces connaissances théoriques pour analyser comment les manuels parlent de logique, ceci à partir d'extraits choisis de « cours » et d'exercices proposés. Des enseignants du secondaire du groupe « Logique » de l'IREM de Paris viennent exposer des exercices ou des séquences qu'ils ont proposés dans leurs classes. Enfin, lors de la troisième journée de stage, ce sont les stagiaires qui proposent un retour sur des activités qu'ils ont mises en place dans leurs classes.

La logique dans les lycées : un nouveau (?) savoir (?)

« Notations et raisonnement mathématiques » dans les nouveaux programmes de mathématiques pour le lycée.

La nouveauté de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée peut se discuter. En effet, une opinion courante est de considérer que l'on fait forcément de la logique quand on fait des mathématiques, et qu'il n'est pas besoin d'attendre que les programmes parlent de logique pour savoir qu'il y a certaines notions de logique dont il est bon de parler aux élèves. Il n'empêche que le programme de 2009 pour la classe de Seconde a amené certains changements. Regardons ces programmes plus attentivement : on trouve tout d'abord dans les commentaires au début du programme [Mathématiques, Classe de Seconde, 2009] un paragraphe « Raisonnement et langage mathématiques » dont voici un extrait :

*Le développement de l'argumentation et l'entraînement à la logique font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme [...] Comme les éléments de logique mathématique, les notations et le vocabulaire sont à considérer comme des conquêtes de l'enseignement et non comme des points de départ.*

Le gras est celui du texte du programme. Nous avons mis en italique ce qui était déjà présent dans le programme de 2001 (si ce n'est qu'il n'était pas question de « logique mathématique » mais de « logique formelle »... sans qu'il soit possible de savoir la nuance que souhaitent apporter là les auteurs des programmes). Ceci marque ainsi un retour discret de la logique dans les programmes de mathématiques du lycée, nouvel épisode d'une histoire mouvementée [Mesnil, 2012].

C'est en 1960 que les programmes de mathématiques mentionnent explicitement pour la première fois des notions de logique avec l'apparition des symboles d'implication, d'équivalence et des quantificateurs. La logique est bien sûr très présente dans le programme pour la classe de Seconde de 1969 (réforme dite « des maths modernes »), elle est associée à la théorie des ensembles pour constituer la base du langage mathématique. Cette réforme ayant subi les échecs et critiques que l'on connaît (mathématiques trop abstraites et élitistes, pas adaptées aux besoins scientifiques), le programme de 1981 (dit « de la contre-réforme ») adopte une attitude « inverse » en ce qui concerne la logique : elle est exclue, jetée avec l'eau du bain formaliste (on trouve dans ce programme les indications suivantes : « il convient de souligner les formes diverses de raisonnement mathématique mises en jeu dans les situations étudiées; mais on évitera tout exposé de logique mathématique. »). L'exclusion persiste dans le programme de 1990, jusqu'au timide retour déjà évoqué dans le programme de 2001. Soulignons également une présence plus marquée de la logique dans le programme de Première pour la section littéraire en 2004.

Le programme de 2009 comporte cependant encore une nouveauté par rapport à celui de 2001, c'est la présence d'un tableau fixant, pour tout le lycée, des objectifs en terme de « notations et raisonnement mathématiques » :

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : \in , \subset , \cup , \cap ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A , on utilise la notation des probabilités \overline{A} .

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles \forall , \exists ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

La publication du programme s'accompagne de celle d'un document « ressources pour la classe de Seconde » [document ressource, 2009], intitulé « Notations et raisonnement mathématiques ». Quelques exemples d'activités y sont donnés et commentés, mais on n'y trouve aucune connaissance théorique sur les objets évoqués par le programme¹.

Exemples d'effets de ces nouveaux programmes.

Nous donnerons deux exemples d'effet direct de ces programmes. Dans la plupart des manuels de mathématiques de Seconde publiés pour la rentrée 2010, on peut trouver des pages où sont évoquées les notions dont il est question dans le tableau ci-dessus. Ces pages n'existaient pas dans les versions précédentes des manuels. On trouve aussi dans chaque manuel un certain nombre d'exercices avec un logo « logique » (notamment beaucoup d'exercices « vrai ou faux »). On trouve donc bien, de fait, du nouveau à enseigner dans les manuels, même si cela ne change pas forcément la pratique de certains professeurs.

Zoé Mesnil a interrogé en 2011, à travers un questionnaire en ligne, des enseignants de mathématiques de Seconde. 41 réponses ont été obtenues, d'une part de professeurs inscrits à la formation « initiation à la logique », d'autre part de professeurs qui ont bien voulu donner leur avis sur l'enseignement de la logique au lycée. La question « Travaillez-vous sur des notions de logique avec vos élèves de Seconde ? » a été posée en différenciant deux époques, avant 2009 et depuis 2009. Sur 41 professeurs ayant répondu, 21 déclarent qu'ils travaillaient sur des notions de logique avant 2009, contre 16 qui déclarent qu'ils ne le faisaient pas (3 professeurs n'étaient pas encore en poste), alors que 38 déclarent travailler sur des notions de logique depuis 2009, contre 3 qui déclarent ne pas le faire. Les professeurs qui ont répondu au questionnaire sont sans doute particulièrement soucieux de ces questions de logique, mais il semble tout de même que les injonctions du programme aient eu un effet, reste à savoir ce que signifie pour les professeurs « travailler sur des notions de logique ».

¹ On peut trouver analyse de ce document dans [Groupe Logique et Raisonnement de l'IREM de Grenoble, 2011]

En effet, nous avons montré que la présence de notions de logique dans les nouveaux programmes présentait un certain caractère de nouveauté, mais s'agit-il d'enseigner un nouveau savoir ? A quel contenu exact correspondent ces objectifs ? Qu'est-ce qu'il s'agit d'enseigner ? Le professeur qui a charge d'atteindre les objectifs donnés doit répondre à ces questions difficiles, il devrait pouvoir éventuellement être aidé en consultant le programme et d'éventuelles ressources qui l'accompagneraient, ou qui lui seraient suggérées. Nous sommes dubitatifs sur cette possibilité concernant la logique.

Pour illustrer ce point, nous proposons une comparaison avec une autre nouveauté de ce programme : la notion d'*échantillon*, que le programme précédent ne faisait qu'évoquer. Cette notion est définie explicitement dans le programme, ainsi que dans le document ressources « Probabilités et statistiques », où il est précisé que « cette notion d'échantillon fournit un cadre théorique pour démontrer les résultats énoncés ci-dessous sur la fluctuation d'échantillonnage ». Par ailleurs, quiconque voudra en savoir plus sur l'échantillonnage pourra toujours aller ouvrir un livre de statistiques, et il est à noter que les statistiques, très présentes dans les nouveaux programmes, avaient fait auparavant leur entrée dans le programme de la formation initiale des enseignants.

La notion de *proposition conditionnelle* est aussi une notion nouvelle dans le programme (voir ci-dessus : « les élèves sont entraînés (...) à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions, et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles »). Cette notion n'est définie ni dans le programme, ni dans le document ressources « notations et raisonnement mathématiques ». Cela ne choquera pas ceux qui pensent que les connaissances en logique relèvent d'un savoir spontané, et que faire des mathématiques suffit pour savoir par exemple ce qu'est une proposition conditionnelle. Tout dépend bien sûr de ce qu'on entend par « savoir ». Beaucoup de théorèmes mathématiques se présentent sous la forme d'une implication universellement quantifiée (nous préférons cette expression à celle de proposition conditionnelle dont nous ne savons pas exactement ce qu'elle recouvre), et on peut effectivement considérer que toute personne ayant une bonne habitude des mathématiques a compris comment utiliser ou démontrer un théorème se présentant sous cette forme. Mais nous pensons que ces connaissances issues de la pratique, comportant de nombreux implicites sur lesquels nous reviendrons, ne sont pas suffisantes pour un professeur qui veut transmettre cette notion à ses élèves. Celui-ci a besoin également d'adopter une attitude réflexive par rapport à ce type d'objet. C'est une des motivations essentielles de la création de la formation que nous décrivons ici.

Concernant l'implication, des recherches [Deloustal-Jorrand, 2001 ; Rogalski et Rogalski, 2004] sur les conceptions d'étudiants en formation de professeur de mathématiques montrent une méconnaissance de cet objet. Nos questions aux stagiaires suivant la formation confirment ce constat : la forme disjonctive ($\text{NON}(A) \text{ OU } B$) de l'implication ($A \Rightarrow B$), le fait que la négation d'une implication ne se présente pas « naturellement » sous la forme d'une implication, les « règles de distribution » des quantificateurs sur les connecteurs ET et OU, sont des propriétés ignorées d'une partie d'entre eux. Dans le questionnaire aux enseignants de Seconde déjà évoqué ci-dessus, il a été demandé aux professeurs si « pour construire un enseignement [leur] permettant d'atteindre les objectifs fixés par le programme, [leurs] connaissances en matière de logique mathématique [leur paraissent] suffisantes ». 30 d'entre eux répondent « oui » (sachant que la plupart disent avoir eu une initiation à la logique dans leurs études supérieures), 11 répondent « non ». Ici encore l'échantillon des professeurs qui ont répondu n'est pas représentatif de l'ensemble des professeurs de mathématiques mais ces résultats laissent à penser qu'un nombre non négligeable de professeurs ressentent un manque de formation en matière de logique.

Cette comparaison entre deux points du programme souligne ce que nous constatons par ailleurs : la logique mathématique est une discipline des mathématiques reconnue comme telle et fournissant des résultats importants à d'autres branches des mathématiques mais ça n'est cependant pas vers elle que l'on se tourne spontanément pour étudier la logique à l'oeuvre dans l'activité mathématique (ce qui ne serait peut-être effectivement pas directement efficace pour ce qui concerne les objectifs des nouveaux programmes), et elle n'est actuellement pas au programme de la formation initiale des professeurs (il existe localement de petites initiations à la logique, soit en classe préparatoire, soit en début de cursus universitaire, mais sans que les connaissances visées soient orientées vers l'enseignement). Nous sommes donc convaincus que les nouveaux programmes introduisent une nouveauté concernant la logique. Et comme nous l'avons mentionné, ceci se fait sans qu'il y ait de consensus sur un contenu de référence qui constituerait les bases de logique à connaître pour faire des mathématiques, ni sur la façon de parler de ce contenu.

De la nécessité d'une formation.

Logique, vous avez dit logique ?

Le terme « logique » n'est pas un terme proprement mathématique. On parle généralement de logique là où il y a raisonnement (« un cheval, des chevaux, un canal, des canaux, un maréchal, des maréchaux, un festival, des festivals, logique non ?! ») et là où il y a des règles, explicites ou non, dictant une façon de faire (« La logique du vivant » de François Jacob... ou « Pour en finir avec le darwinisme : une nouvelle logique du vivant » de Rosine Chandebois). On parle parfois de *logique naturelle* pour désigner « toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors d'un cadre mathématique, utilisées dans des situations de la vie courante » [Deloustal-Jorrand, 2004]. Cette logique naturelle est présente dans l'activité des élèves (on devrait plutôt dire ces logiques naturelles, puisque chaque élève peut user de la sienne qui ne sera pas forcément celle de son voisin). Dans le programme de 2009, l'élève doit être amené à « détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ». On trouve dans la suite du texte du programme, comme exemple de ces différences entre logique mathématique et logique du langage courant qu'il est important de distinguer, celle entre implication mathématique et causalité. Vaste programme qui demande un peu plus d'explications : les deux notions d'implication mathématique et de causalité étant chacune complexes, elles méritent peut-être d'être étudiées pour elles-mêmes avant d'être comparées l'une à l'autre !

Les manuels sonnent l'alerte.

Lors de la mise en place des programmes, il a été très intéressant d'analyser la façon dont les manuels se sont emparés de ces objectifs. Nous précisons ici quelques exemples tirés des analyses effectuées par le groupe « Logique » de l'IREM de Paris [Groupe logique, 2011].

Peu de manuels se sont aventurés à parler de la distinction évoquée entre implication mathématique et causalité. Le document ressources « Notations et raisonnement mathématiques » [document ressource, 2009] n'en dit pas plus sur cette distinction. Nous ne saurions dire ce que les rédacteurs du programme avaient en tête en écrivant cette phrase, ce qui nous paraît essentiel c'est de ne pas confondre « si A alors B » et « A donc B », nous y reviendrons. Par contre, à propos de « détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant », tous les manuels signalent la distinction entre le « ou » du langage courant qui est la plupart du temps exclusif (l'exemple « fromage ou dessert » est dans plusieurs manuels), contrairement à son usage en mathématiques où il est inclusif. Nous allons creuser cet exemple.

Les comportements des connecteurs logiques ET et OU par rapport aux valeurs de vérité sont liés à la signification usuelle du « et » et du « ou » dans le langage courant. Il a fallu faire un choix entre « ou » exclusif et « ou » inclusif, les deux étant présents dans le langage courant. Le connecteur logique OU correspond au « ou » inclusif, ce qui n'est peut-être pas l'interprétation spontanée de certains élèves. Les connecteurs ET et OU présentent ainsi une certaine « dualité » qui peut être expliquée aux élèves. Mais tous les « et » et les « ou » employés pour parler d'objets mathématiques ne sont pas des connecteurs logiques au sens mathématique du terme, c'est-à-dire des opérateurs sur les propositions, qui permettent, à partir de deux propositions P et Q , de former leur conjonction (P ET Q) ou leur disjonction (P OU Q). Certains ne sont, même « en mathématiques », que des conjonctions de coordination. Par exemple, si « les ensembles A et B sont non vides » est bien un raccourci de la conjonction des deux propositions « A est un ensemble non vide » et « B est un ensemble non vide », la situation est toute différente pour « les ensembles A et B sont disjoints » qui n'est pas une conjonction de deux propositions (on évoque là la propriété d'un couple de deux ensemble, le « et » a le même rôle que dans « Pierre et Paul sont frères »).

La plupart des manuels parlent du « et » et du « ou », mais de façons parfois assez différentes. Un premier exemple de traitement :

II. Et – Ou, Intersection – Réunion

- Dans le **langage usuel** on emploie les mots « et », « ou ».

Le mot « et » peut signifier :

- « à la fois » comme dans la phrase « cet élève est blond **et** porte des lunettes » ;
- « et puis » comme dans la phrase « l'élève ouvre son sac **et** sort sa calculatrice ».

Le mot « ou » peut signifier :

- « soit l'un, soit l'autre, mais pas les deux à la fois » comme au restaurant, dans l'expression « fromage **ou** dessert ».

Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens exclusif.

- « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois » comme dans la phrase « s'il pleut **ou** s'il vente, je ne sortirai pas ».

Dans ce cas, on dit que le mot « ou » a un sens non exclusif.

- On emploie aussi ces mots **en mathématiques** :

Le mot « et » signifie uniquement « à la fois ».

Le mot « ou » signifie uniquement « soit l'un, soit l'autre, soit les deux à la fois ».

Par exemple : « 6 est un nombre pair **et** un multiple de 3. » (1)

« 0, 2, 3, 6 sont des nombres pairs **ou** des multiples de 3. » (2)

La phrase (1) est vraie car les deux phrases « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » sont vraies. La phrase (2) est vraie car pour chacun des nombres 0, 2, 3, 6, l'une au moins des deux phrases est vraie.

Manuel Indice

Ce manuel propose une approche « naturelle » du langage mathématique : celui-ci n'est rien d'autre que le langage courant utilisé « en mathématiques » (c'est-à-dire vraisemblablement quand on parle d'objets mathématiques, quand on est en cours de mathématiques). On peut noter que la notion de proposition est absente de cet extrait de manuel (même implicitement). Il est question de phrases.

Soulignons plusieurs implicites dans les exemples proposés. C'est à la charge de l'élève par exemple de voir les deux propositions « 6 est un nombre pair » et « 6 est un multiple de 3 » dans la proposition raccourcie « 6 est un nombre pair et un multiple de 3 ». Ça n'est peut-être pas très compliqué mais pourquoi ne pas signaler ce point ? Par ailleurs, la proposition « 0, 2,

3, 6 sont des nombres pairs ou des multiples de 3 » peut être entendue de plusieurs façons. D'une part comme :

(0 est un nombre pair OU 0 est un multiple de 3)
ET (2 est un nombre pair OU 2 est un multiple de 3)
ET (3 est un nombre pair OU 3 est un multiple de 3)
ET (6 est un nombre pair OU 6 est un multiple de 3)

ou d'autre part comme :

(0 est un nombre pair ET 2 est un nombre pair ET 3 est un nombre pair ET 6 est un nombre pair)
OU

(0 est un multiple de 3 ET 2 est un multiple de 3 ET 3 est un multiple de 3 ET 6 est un multiple de 3)

La présence des virgules amène une ambiguïté car les deux interprétations possibles ne sont pas équivalentes, il est facile de s'en apercevoir : la première proposition est vraie, la deuxième proposition est fausse. La phrase aurait bien sûr pu être prononcée par un mathématicien, le manuel n'est pas en cause sur ce point, nous cherchons à souligner les implicites sous-jacents à de tels raccourcis de formulation.

Remarquons au passage que de telles propositions sont longues à écrire, d'où le recours à des formes raccourcies si l'on choisit de s'exprimer dans des formulations du langage courant, ou à de la symbolisation si l'on choisit de s'exprimer dans un langage mathématique plus formalisé (ici on pourrait par exemple appeler $P(n)$ le prédicat « n est un nombre pair » et $Q(n)$ le prédicat « n est un multiple de 3 », et l'on verrait plus clairement les ressemblances et différences entre les structures des deux propositions).

D'autres manuels ont une approche plus « propositionnelle » des connecteurs ET et OU. Ceux-ci sont effectivement définis comme des opérateurs sur les propositions (aspect syntaxique) dont on donne le comportement par rapport aux valeurs de vérité (aspect sémantique). Par exemple :

Définition 6

Soient P et Q deux propositions :

– (P et Q), appelé **conjonction** des propositions P , Q est vraie lorsque P et Q sont vraies toutes les deux.

– (P ou Q), appelée **disjonction** des propositions P , Q est une proposition vraie si l'une au moins des propositions P ou Q est vraie (et donc fausse lorsque P et Q sont fausses toutes les deux).

Exemple : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » est une conjonction d'« être rectangle » et « isocèle » ; « le triangle ABC est rectangle ou isocèle » est une disjonction d'« être rectangle » ou « isocèle », ce qui conduit souvent à distinguer deux cas : 1. le triangle est rectangle, 2. le triangle est isocèle.

Manuel Symbole

Ici, des objets sont définis, du vocabulaire est introduit, qui peut servir. Les définitions du manuel correspondent bien aux définitions savantes. La manière de définir les propositions est peu précise : « le triangle ABC est rectangle et isocèle » n'est pas la conjonction d'« être rectangle » et « isocèle », mais de « le triangle ABC est rectangle » et « le triangle ABC est isocèle », moyennant encore une fois un raccourci de formulation (non explicité). Par ailleurs, un exercice dans lequel il serait question d'un triangle « rectangle ou isocèle » semble improbable, et même si effectivement l'élève pourrait alors devoir distinguer deux cas, est-il alors bien clair pour lui que les situations « rectangle » et « isocèle » ne sont pas forcément

disjointes, contrairement à ce qui se passe la plupart du temps (mais qui n'est pas une obligation) quand on fait un raisonnement par disjonction des cas ?

La notion de proposition est absente de la plupart des pages des manuels qui parlent de notions de logique. Et elle est souvent absente du discours des professeurs, ceux que nous voyons au stage considèrent généralement que c'est une notion trop abstraite. Pourtant nous défendons l'idée que les propositions sont un élément essentiel dans l'acquisition du langage mathématique, et que cette notion peut être introduite comme « phrase mathématique pouvant être vraie ou fausse », pourquoi pas dès le collège, en association avec la notion de variable. C'est par contre sans doute plus difficile pour des élèves de considérer les propositions comme des objets et de considérer qu'il est possible de faire des « opérations » sur ces propositions. Mais ce n'est peut-être pas beaucoup plus difficile que de voir les fonctions comme des objets pouvant avoir la propriété d'être croissante ou non, pouvant être additionnées. Les deux extraits cités malmènent, selon nous, cette notion de proposition et donc, par là même, la notion de connecteur logique. Le problème est que les élèves ont des tâches à faire avec ces seules explications !

Regardons par exemple l'exercice suivant :

Pour s'entraîner

Compléter les phrases suivantes, soit avec « et », soit avec « ou » :

- a. 1, 5, 8, 9, 11, 15 sont des entiers impairs ... inférieurs à 10.
- b. 2, 3, 6, 18 sont des entiers multiples de 3 ... inférieurs à 10.
- c. 6, 12, 18 sont des entiers divisibles par 3 ... par 2.
- d. 10, 20, 60 sont des multiples de 2 ... de 5.

Manuel Indice

Outre les soucis déjà signalés liés à l'interprétation des virgules, et en passant sur le fait qu'il n'est pas précisé que les phrases doivent être complétées de manière à être vraies, il faut tout-de-même signaler une stratégie efficace pour cet exercice qui est de compléter toutes les phrases avec des « OU » puisque quand $(A \text{ ET } B)$ est vraie, $(A \text{ OU } B)$ l'est aussi. Cette stratégie a peu de chance d'émerger dans une classe de Seconde, car nous sommes habitués à répondre en nous conformant inconsciemment au principe du maximum d'information qui oeuvre dans la vie courante : si l'on peut donner une réponse contenant plus d'informations qu'une autre réponse, même si les deux sont justes, c'est celle-là que l'on donne. Or le raisonnement logique ignore ce principe : deux réponses justes sont également acceptables, il n'y a pas des propositions « plus vraies » que les autres. Un tel exercice peut être l'occasion de discuter de tout ça avec les élèves, mais est-ce bien clair que les deux connecteurs sont parfois acceptables ? Le livre du professeur donne une correction : à la question c. la réponse est « c. et »...

Dans les manuels, les exemples sont nombreux qui montrent qu'il n'est pas si simple de parler de logique. Leur lecture a renforcé notre motivation pour proposer une formation qui donnerait aux enseignants des outils pour dire et écrire des choses plus cohérentes et explicites sur les points évoqués... et pour qu'ils soient en mesure de prendre du recul sur leur travail et sur les propositions des manuels.

Description de la formation « initiation à la logique ».

Le stage de formation continue est proposé par l'IREM de Paris aux trois académies de Paris, Créteil et Versailles. Il se déroule sur 3 journées de 6h, deux journées consécutives en janvier et une journée en mars.

Un apport théorique basé sur l'étude du langage mathématique familier aux professeurs de mathématiques.

La logique dont nous parlons dans ce stage pourrait s'appeler la logique des mathématiques, et être définie comme l'art d'organiser son discours dans cette discipline. Organiser son discours, cela recouvre :

- des questions de forme : quel langage utilisons nous ? Quelle est sa syntaxe ? Quel est son alphabet ?
- des questions de sens « local » : qui est cet objet ? Que signifie cet énoncé ?
- des questions de sens « global » : cet énoncé est-il vrai ou faux ? quels liens avec d'autres énoncés ? Ce raisonnement est-il valide ?

C'est à un discours produit et non à un discours intériorisé que nous nous intéressons. Il ne s'agit pas de chercher une psycho-logique du mathématicien, du professeur ou de l'élève de la classe de mathématiques, mais bien de se pencher sur le langage utilisé pour parler les mathématiques. Nous nous appuyons, pour décrire cette logique des mathématiques, sur le point de vue qu'en propose la logique mathématique. La logique mathématique peut-être vue comme l'aboutissement d'une étude de la logique mise en acte dans l'activité mathématique. Daniel Lacombe [Lacombe, 2007] la décrit comme une modélisation de la « métamathématique » :

La logique mathématique c'est une branche des mathématiques, une branche des mathématiques appliquées, mais appliquées à quoi ? Appliquées aux mathématiques. Ce qui donne à la logique mathématique dès le début cet aspect circulaire, de serpent se mordant la queue, qui en fait, fait son charme. Mais ceci étant dit, ça n'est pas si paradoxal que ça, il suffit de considérer quelque chose qui est tout-à-fait connu maintenant, c'est la notion de modèle mathématique. (...) Les objets qui constituent le modèle mathématique ne sont pas du tout ceux qui constituent le domaine qu'on veut modéliser (...) [Pour la logique mathématique] le domaine extra mathématique qu'il s'agit de modéliser c'est ce qu'on appelle quelque fois la métamathématique, il vaudrait mieux dire la métamathématique naïve, qui s'occupe non pas des objets mathématiques mais de ce qu'on fait lorsqu'on traite des objets mathématiques, ce qui n'est pas du tout la même chose.

Mais le but du stage n'est pas de faire un cours de logique mathématique, et nous partons plutôt d'une approche naïve du langage mathématique. Approche naïve dans la mesure où elle s'appuie sur certaines notions prises au sens intuitif (notamment les notions de propositions, de démonstration, de vérité, que l'on suppose suffisamment familières aux professeurs de mathématiques pour pouvoir bâtir la formalisation de la logique des mathématiques envisagée sans définition formelle). Ce langage est au centre de l'activité mathématique, décrite ainsi par René Cori dans la formation (stage « Initiation à la logique », IREM de Paris, 2012):

Que fait un mathématicien ? Il observe des objets, que nous appellerons objets mathématiques. Ces objets peuvent être de natures très diverses : des nombres, des objets géométriques, des fonctions, des espaces probabilisés... Donc on regarde ces objets et on essaie de savoir comment ils vivent, comment ils sont organisés, qu'est-ce qui leur arrive, c'est-à-dire en découvrir les propriétés. On essaie de récolter des informations sur des objets qui forment un univers que l'on peut appeler l'univers mathématique. Ces objets mathématiques, si on veut

décrire leurs propriétés, pouvoir en parler, il faut les nommer, leur donner des noms. Les mathématiciens sont très inventifs, ils disposent de tas de noms pour nommer les objets.

Le langage utilisé par le mathématicien est plus ou moins formalisé selon le contexte de son discours : cours, idées jetées sur un brouillon, discussion devant un tableau avec des collègues spécialistes, séminaire, rédaction d'un article. Les propositions mathématiques peuvent en effet être formalisées dans un langage qui comprend les connecteurs classiques NON, ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À, les quantificateurs et des prédicats, ainsi que leurs règles syntaxiques d'utilisation, et leur sémantique, c'est-à-dire leurs comportement par rapport aux valeurs de vérité. Mais les mathématiciens s'expriment régulièrement de manière plus relâchée, par exemple, « k peut être aussi grand que l'on veut, e (quantification universelle) ou pour au moins l'un d'entre eux (quantification existentielle). Là encore, la quantification est présente dans la langue naturelle, et nous pourrions dire à celui qui insiste pour nous convaincre de quelque chose : « quel que soit ton argument, je le réfuterai », mais la syntaxe de cette phrase est bien différente de celle que nous utiliserions en modélisant le sens en utilisant une variable X astreinte à l'ensemble « tes arguments »². Nous dirions alors : « quelque soit X , je réfuterai X », ce qui correspond à peu près à « quelque soit ton argument, je réfuterai ton argument », cette reprise du syntagme « ton argument » n'étant pratiquement jamais utilisée dans la langue naturelle, sauf à chercher un effet de style. La variable n'est pas juste un concept particulier des mathématiques, difficile à conceptualiser, c'est aussi un élément central du langage mathématique auquel sont rattachées des règles syntaxiques rarement explicitées.

Les variables peuvent être libres (on parle aussi de variable parlantes) ou muettes (liées). Cette distinction entre variables muettes et variables parlantes nous paraît importante car elle permet de mettre des mots sur certains troubles que peuvent ressentir les élèves. Les variables muettes sont physiquement présentes dans des expressions mathématiques, noms ou propositions, qui ne parlent pourtant pas d'elles, à la différence de ce qui se passe la plupart du temps pour les variables parlantes (même si le sens de certaines expressions comportant des variables parlantes n'est pas toujours dépendant de ces variables, par exemple le nom

² Il faudrait aussi modéliser « tu » et « je », mais le propos ici n'est pas de faire de la modélisation de phrases du langage naturel, jeu souvent proposé pour développer la logique chez les élèves... mais rapidement très complexe.